

# INFINITO

Prof. Danilo Giulietti  
Dipartimento di Fisica, Università di Pisa  
danilo.giulietti@unipi.it

Guardando il cielo in una notte stellata o pensando al tempo passato ed a quello di là da venire, chi non si è confrontato, almeno una volta, con il concetto di Infinito ? Pensieri inquietanti, come la morte, che tendiamo a rimuovere, per andare avanti, comunque. In queste stringate note vorrei sintetizzare le riflessioni che ho provato a stimolare durante la conferenza su "Infinito" promossa dall'Istituto Storico Orvietano il 26 Novembre 2021. Ho cercato di essere comprensibile per tutta la variegata "audience", senza però rinunciare al rigore scientifico. Di conseguenza, coloro che "masticano" un po' di Matematica e di Fisica troveranno alcune informazioni/considerazioni superflue, mentre chi è per natura "allergico" al linguaggio matematico sarà disturbato dalle poche formule presenti nel testo.

## Infinito in Matematica.

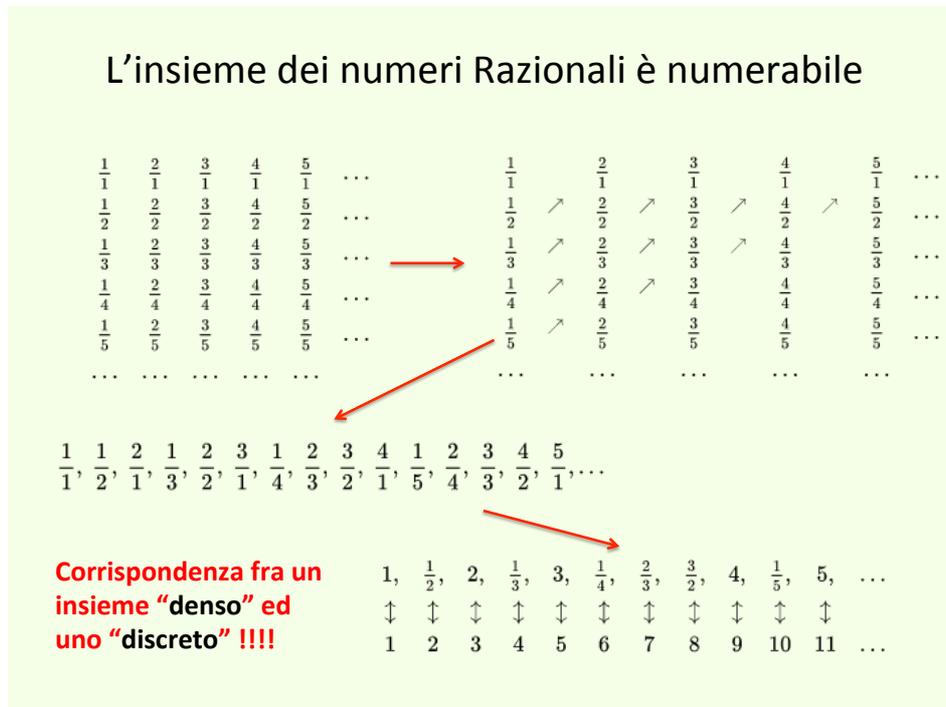
E' in ambito matematico che constatiamo come, quando si considerano insiemi infiniti, si possono verificare situazioni contro-intuitive, per noi abituati a confrontarci abitualmente con insiemi finiti. E' il caso ad esempio del così detto "Albergo di Hilbert" o la corrispondenza che si può stabilire fra un insieme denso (numeri razionali,  $Q$ :  $1/3, 4/5, 13/2, \dots$ ) ed uno discreto (numeri naturali,  $N$ :  $1, 2, 3, \dots$ ).

L'Albergo di Hilbert è un'utilissima astrazione, che ci fa capire quanto sorprendente sia avere a che fare con quantità infinite. L'Albergo è costituito da infinite camere, che sono tutte già occupate. Eppure l'Albergo è capace di accogliere ancora infiniti nuovi ospiti. Basta solo che coloro che già vi sono alloggiati facciano un semplice cambiamento di camera, andando dalla camera numero  $n$  a quella  $2n$ . In questa maniera si libereranno tutte le stanze con numero dispari, che sono appunto infinite! Anche uno spostamento del tipo  $n \rightarrow 2n+1$  sarebbe andato altrettanto bene. In questo caso si sarebbero liberate tutte le stanze con numero pari. L'esempio ci mostra come (per insiemi di infiniti elementi) si possa stabilire una corrispondenza biunivoca fra tutti i suoi elementi e quelli di una parte; nello specifico, fra i numeri naturali ( $N$ ) e due suoi sottoinsiemi, i numeri pari ( $P$ ) e quelli dispari ( $D$ ).



Fig.1 L'Albergo di Hilbert

Altrettanto sorprendente è la corrispondenza biunivoca mostrata da Cantor fra i numeri naturali (N) e quelli razionali (Q), semplicemente ordinando questi ultimi come mostrato in Figura 2.



Quello di cui non si capacitavano i filosofi Greci era che una somma d'infiniti termini potesse dare un numero finito, come in questo caso in cui la somma dei tempi che impiega Achille per raggiungere di volta in volta le posizioni in cui successivamente si trova la tartaruga dà un intervallo temporale finito.

**Achille e la Tartaruga**  
*(infiniti e infinitesimi)*

$$\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_0}{V_A} \left( \frac{V_T}{V_A} \right)^n = \frac{L_0}{V_A} \frac{1}{1 - \left( \frac{V_T}{V_A} \right)} = \frac{L_0}{V_A - V_T}, \quad \tau_0 = \frac{L_0}{V_A}$$

**La somma di infiniti termini dà un numero finito**

$$X_A(t) = V_A \times t$$

$$X_T(t) = L_0 + V_T \times t$$

$$X_A(\tau) = X_T(\tau) \rightarrow V_A \times \tau = L_0 + V_T \times \tau \rightarrow \tau = \frac{L_0}{V_A - V_T}$$

Fig.4 Tempo impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga.

In Fig. 4 si può vedere come il tempo impiegato da Achille per raggiungere la posizione iniziale della tartaruga sia  $(L_0/V_A)$  (primo termine della somma,  $n=0$ ); nel frattempo la tartaruga sarà avanzata di  $(L_0/V_A)V_T$ , distanza coperta da Achille in un tempo  $(L_0/V_A)V_T/V_A$  (secondo termine della somma,  $n=1$ ), e così via. Ci troviamo di fronte ad una progressione geometrica di ragione  $V_T/V_A < 1$ , la cui somma converge al tempo impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga, cioè  $\tau_0=L_0/(V_A-V_T)$ . Lo stesso risultato si può ottenere ragionando semplicemente in termini cinematici, scrivendo l'equazione oraria per Achille e per la tartaruga ed eguagliandole. In entrambi i casi si è fatto uso del concetto di velocità, definita come il rapporto fra due successive posizioni (differenza di due coordinate spaziali) di un corpo in movimento e l'intervallo temporale trascorso fra le due, al tendere di questo secondo verso valori infinitesimi. Un processo infinito per raggiungere un valore infinitesimo !

**Somme di Serie Numeriche**

Serie numeri naturali  $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \infty$

Serie Armonica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$

Serie IperArmonica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$

Serie Geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1-r}$   
per  $r < 1$

Fig.5 Somme di infiniti termini di serie numeriche: alcune convergono ad un ben preciso valore, altre divergono all'infinito.

## Infinito in Fisica.

Quando passiamo dal mondo matematico all'osservazione della Natura, cioè alla Fisica ( $\tau\alpha\ \phi\upsilon\sigma\iota\kappa\alpha$ ), ci imbattiamo spesso in insiemi costituiti da un grandissimo numero di elementi; tanto grande che non potremmo pensare di "contare", come ad esempio se avessimo a che fare con un sacco di fagioli (operazione tanto lunga quanto inutile, ma pur sempre possibile!). Di tali insiemi possiamo tuttavia stimare il numero di elementi di cui sono costituiti, come mostrato in Fig. 6. Sono numeri enormi, che solo utilizzando le potenze (in genere si usa la base 10,  $N=10^n$ ) possono essere trattati. Si scopre allora che le molecole in  $1\text{cm}^3$  di aria a pressione atmosferica sono un milione di volte più numerose dei granelli di sabbia di una spiaggia, ma mille volte meno delle stelle, il cui numero (sulla base delle galassie osservabili con il telescopio Hubble) è sottostimato, ma non sappiamo dire di quanto. Mancano infatti nel conteggio le stelle che non vediamo, perché troppo debole è la luce che ci arriva, poi quelle la cui luce non è ancora arrivata ed in fine quelle, che non potremo mai vedere, oltre l'orizzonte dell'Universo Osservabile, che si espande ad una velocità superiore a quella della luce nel vuoto. Numeri grandissimi, ma pur sempre finiti ed esprimibili (possibilmente in forma di potenza !!).

### Insiemi di un gran numero di elementi

\* **Spiaggia**  $100 \times 20 \times 2\text{m}^3$

granelli di sabbia di  $0.1\text{mm}^3 = 10^{-10}\text{m}^3 \rightarrow N_{\text{gran}} \approx 4 \times 10^{13}$

\* **molecole in  $1\text{cm}^3$  aria** a pressione atmosferica  $\approx 5 \times 10^{19}$

$PV = n_m N_A K_B T \rightarrow P = n_m N_A K_B T / V = n K T \rightarrow n = K_B T / P$

\* **Numero di Avogadro**  $N_A = 1\text{g} / 1.67 \times 10^{-24}\text{g} \approx 6 \times 10^{23}$

( $P$ =pressione,  $V$ =volume,  $n_m$ =n. moli,  $K_B$ =cost. Boltzmann,  $T$ =temperatura,  
 $n$ = particelle/volume, massa protone  $m_p \approx 1.67 \times 10^{-24}\text{g}$ )

\* **Galassie** visibili con Hubble  $\approx 5 \times 10^{10}$

**Stelle** in una galassia  $10^9 - 10^{12}$

quindi  $\approx 10^{22}$  stelle, più quelle che non vediamo

Fig.6 Insiemi costituiti da un gran numero di elementi.

In Fisica può succedere che un'equazione, che descrive un dato fenomeno, dia valori che tendono all'infinito, per un parametro che si avvicina ad un particolare valore. E' il caso ad esempio della forza che si esercita fra particelle cariche, al tendere della loro reciproca distanza a zero. Quando un'equazione fornisce valori infiniti per una grandezza fisica, vuol dire che essa non descrive più correttamente il fenomeno e che se ne sta manifestando uno nuovo. Nel caso considerato il nuovo fenomeno consiste nell'apparire delle forze nucleari che sovrastano quelle elettromagnetiche (vedi Fig.7).

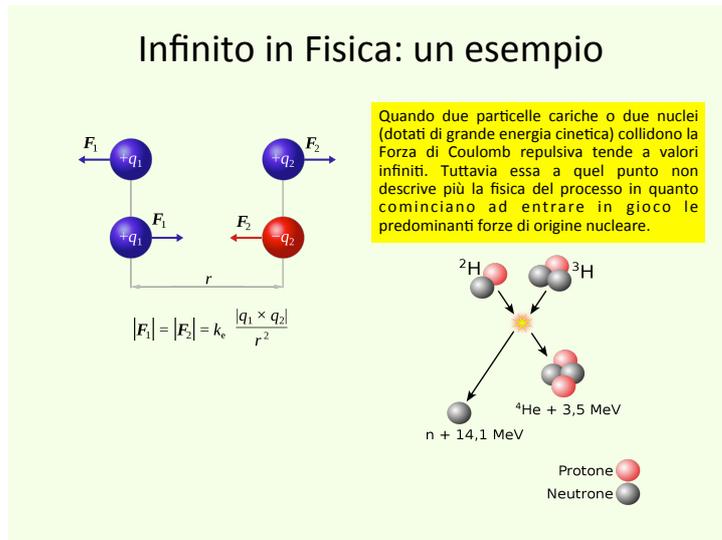


Fig.7. Al tendere di  $r \rightarrow 0$  le forze nucleari sovrastano quelle elettromagnetiche.

### Infinito in Cosmologia.

Un semplice (ed ingenuo !) conto, basato su assodate leggi fisiche, può servirci di introduzione alla complessità della comprensione dell'Universo ed alla molteplicità delle ipotesi sulla sua struttura spazio-temporale.

Supponiamo che l'Universo sia infinito e di conseguenza anche il numero delle stelle. Assumendo  $n$  stelle per unità di volume e una potenza  $W$  emessa mediamente da ciascuna di esse, possiamo calcolare l'intensità di radiazione  $I$ , che si dovrebbe avere in un qualunque punto dell'Universo. Come si può vedere in Fig.8, il conto parte dal calcolo dell'intensità prodotta in un punto dell'Universo, relativamente al contributo delle stelle che si trovano in una sfera di raggio  $r$ , con centro il punto considerato (ad esempio la nostra Terra). Il risultato è semplicemente dato dal prodotto della densità di stelle ( $n$ ) per la potenza emessa mediamente da ciascuna ( $W$ ) per il raggio della sfera ( $r$ ):  $I = nWr$ . Se consideriamo il contributo delle infinite stelle in un infinito Universo (cioè  $r = \infty$ ), l'intensità tenderà anch'essa a valori infiniti ( $I \rightarrow \infty$ ). Siccome né di giorno e tantomeno di notte noi "bruciamo" per la luce delle stelle, vuol dire che l'Universo non è infinito, oppure che la luce delle stelle più lontane non arriva fino a noi in quanto l'Universo si sta espandendo a velocità superiore alla luce nel vuoto (Relatività Generale), oppure che la luce delle stelle viene in parte intercettata dalla "materia oscura", oppure .....???

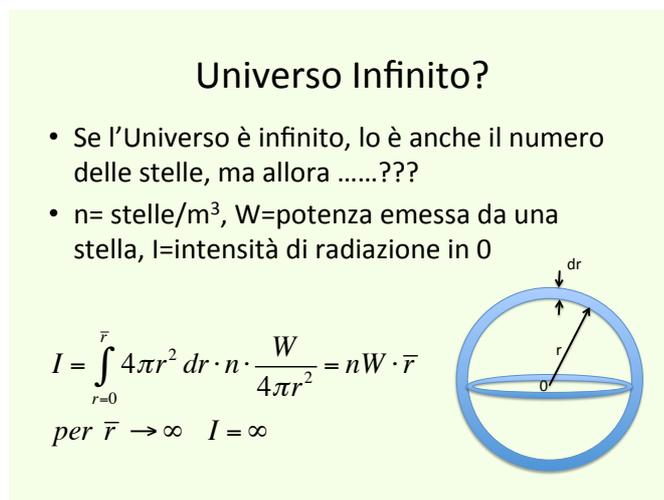


Fig.8 La luce delle stelle

Dunque, alla domanda se l'Universo sia Infinito oppure no è impossibile rispondere, almeno dal punto di vista osservativo/sperimentale, in quanto, come abbiamo prima accennato, le nostre osservazioni si possono spingere al massimo fino all'orizzonte dell'Universo Osservabile. Ma anche rispondere alla domanda "quanto grande è il cielo?" non è facile, come si può capire considerando le varie metodologie utilizzate per determinare le distanze astrofisiche.

### Distanze astrofisiche

Per i corpi celesti a noi più vicini (Luna, Venere, Marte, Sole,...) vengono impiegate **tecniche Radar**. Sono le più accurate e si basano sulla misura dei tempi di andata e ritorno di segnali elettromagnetici inviati sul corpo celeste e da questo riflessi verso la Terra. In Tabella sono riportate le distanze dei corpi celesti a noi più vicini con il tempo necessario ad un impulso di luce per raggiungerli (velocità della luce nel vuoto 300 000 km/s ).

Terra-Luna	38 4400 km = $3.844 \times 10^8$ m	T=1.28 s
Terra-Venere, minima distanza	$3.82 \times 10^{10}$ m	T=127 s
Terra-Marte, minima distanza	$5.6 \times 10^{10}$ m	T=186 s
Terra-Sole, distanza media	$1.496 \times 10^{11}$ m	T=500 s

Tab. Distanze dei corpi celesti più vicini, misurate con tecniche Radar.

Per corpi celesti più lontani il metodo non può essere applicato, in quanto il segnale radio riflesso verso la Terra risulta troppo debole per essere rivelato. Bisogna allora ricorrere ad un altro metodo diretto, che si basa sull'**angolo di parallasse**, cioè sullo spostamento angolare apparente di un oggetto, quando viene osservato da due punti di vista diversi, su di uno sfondo di oggetti molto più lontani. Se ad esempio guardiamo il dito di una mano quando il braccio è disteso, prima con l'occhio sinistro, poi col destro, lo vediamo spostare rispetto agli oggetti che si trovano in uno sfondo lontano. L'effetto è maggiore se avviciniamo il dito ai nostri occhi.

La stessa cosa succede quando si osserva una stella "vicina" sullo sfondo (background) di stelle molto più "lontane", in due momenti del nostro moto di rivoluzione attorno al Sole (diciamo, Marzo e Settembre). In questo caso la base per la misura dell'angolo di parallasse è il diametro dell'orbita terrestre, il cui raggio rappresenta l'Unità Astronomica delle distanze  $1 \text{ UA} = 1.49598 \times 10^{11}$  m.

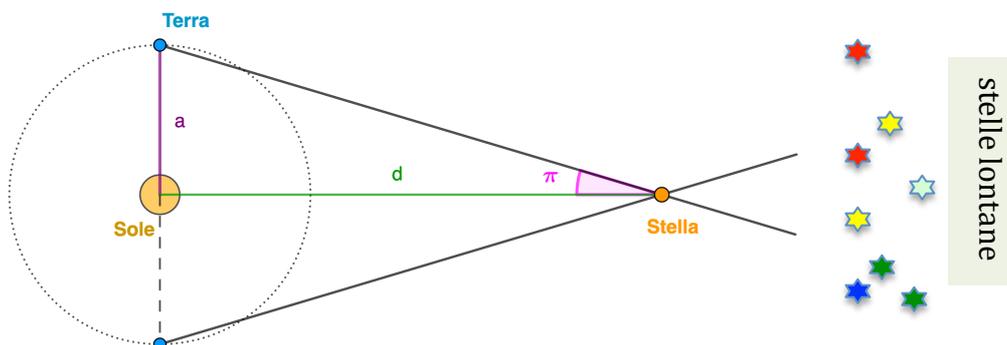


Fig.9. Valutazione delle distanze attraverso la misura dell'angolo di parallasse. Si definisce **Parsec** (pc) la distanza dalla quale 1 UA sottende un angolo di 1" (1 arcsec=1/3600 gradi). Essendo  $d = a / \text{tg}(\pi) \approx a / \pi$  si ha che 1 parsec =  $2.06265 \cdot 10^5 \text{ UA} = 3.0857 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3.261$  anni-luce (al).

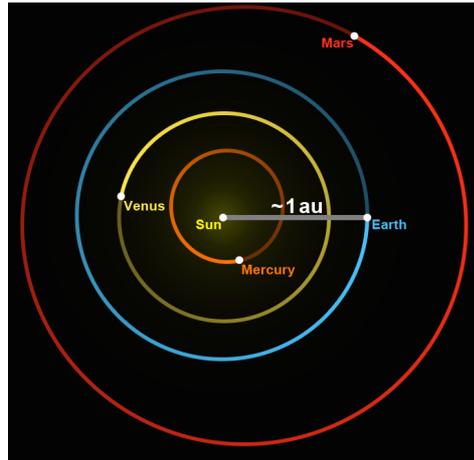


Fig.10. Unità Astronomica di lunghezza: la distanza Terra-Sole.

La difficoltà nella misura della distanza delle stelle, sta nella piccolezza dei relativi angoli di parallasse. Tutte le stelle, anche la più vicina (Proxima Centauri) hanno una parallasse minore di 1arcsec, che corrisponde all'angolo che sottende una moneta da 2EURO ad una distanza di 5km !! Eppure con le attuali tecniche di misura si riesce a valutare parallassi fino a  $10^{-4}$  arcsec, che corrispondono a distanze dell'ordine di 10kpc, circa il raggio della nostra galassia.

Per distanze maggiori bisogna ricorrere a **metodi di misura indiretti**, che si servono di modelli fisici per attribuire ad una data stella la potenza della radiazione emessa, che, confrontata con l'intensità di radiazione misurata sulla Terra, consente di stimarne la distanza. Utilizzando queste tecniche, basate sull'impiego del diagramma di Hertzsprung-Russel, le stelle variabili pulsanti (Cefeidi e RR Lyrae), le supernovae,...si riesce a stimare distanze fino a  $\approx 1$ Gpc. (fattori moltiplicativi:  $k=10^3$ ,  $G=10^9$ )

Per distanze ancora maggiori ci si deve affidare alla legge di Hubble, che lega lo shift (spostamento) verso il rosso delle righe spettrali delle stelle all'effetto Doppler, introducendo contemporaneamente una costante di proporzionalità fra la velocità di allontanamento della stella e la sua distanza. Tale costante ( $H_0$ ) è determinata sperimentalmente sulla base di un confronto con misure di parallasse su alcune stelle relativamente vicine.

$$v = H_0 D, \quad H_0 = 2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

- Cefeidi,  $T \approx C W \rightarrow I = W/4\pi r^2$
- RR Lyrae
- Supernova tipo Ia,  $W \rightarrow I = W/4\pi r^2$
- Legge di Hubble

$$V = H_0 D$$

$$H_0 = 67.15 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

Effetto Doppler

$$\frac{\Delta v}{v} = \left( \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}} \right)^{1/2} - 1 \approx \frac{V}{c} \quad \text{per } \frac{V}{c} \ll 1$$

Fig.11. Misure di distanze dei corpi celesti basandosi sulle "candele campione" e la legge empirico-sperimentale di Hubble.

## **Età e dimensione dell'Universo.....**

Come abbiamo appena visto, le nostre "certezze" (misure dirette delle distanze) si fermano all'interno della nostra galassia. Oltre, là dove l'"occhio" del telescopio spaziale Hubble ci consente di vedere, fino all'orizzonte dell'Universo Osservabile (diametro  $\approx 90\text{Gal}$ ), dobbiamo affidarci alla bontà delle ipotesi avanzate per interpretare alcuni fenomeni fisici (Cefeidi, RR Lyrae, Supernove, ...). E' così ad esempio che, basandosi sull'ipotesi di un Big-Bang, da cui tutto ha inizio, si arriva a stimare l'età dell'Universo, attraverso la costante di Hubble  $T_{\text{Universo}} \approx 1/H_0 \approx 14\text{Ga}$  (miliardi di anni).

## **.....con qualche domanda che attende risposta.**

Certo tutto questo ci induce a porci numerose domande, rispondere alle quali non è facile.

Ad esempio: come è possibile vedere stelle lontane  $90\text{Gal}$  (miliardi di anni-luce), se tutto è cominciato  $14\text{Ga}$  fa? Secondo la Relatività Generale l'espansione dell'Universo può avvenire a velocità superiori a quella della luce nel vuoto ( $c=300\,000\text{ km/s}$ ), per cui delle stelle più lontane noi vediamo ora la luce emessa quando la loro distanza era tale da consentire a quella luce di raggiungerci.

Dalle osservazioni spettrali della luce emessa dalle stelle, sulla base della legge di Hubble, riteniamo che l'Universo si stia espandendo. Ma questa espansione durerà per sempre ovvero ad un certo momento essa si fermerà per dare l'avvio ad una contrazione, fino ad arrivare ad un Big-Crunch? Ci sono due "partiti" fra gli addetti ai lavori, che si affidano alla presenza di entità fisiche ipotizzate, ma non ancora validate da solide evidenze sperimentali: l'Energia Oscura (se confermata supporterebbe l'ipotesi di una eterna espansione) e la Materia Oscura (se confermata supporterebbe l'ipotesi di un'espansione destinata a fermarsi per dar luogo ad una successiva contrazione prodotta da soverchianti effetti gravitazionali).

## **Spazio e Tempo**

Nel cercare di sintetizzare quanto fino ad ora crediamo di aver capito sull'Universo, abbiamo già osservato che gli aspetti spaziali e temporali sono fra loro connessi. Quando talvolta ci capita di osservare al tramonto il Sole che scompare dietro la linea dell'orizzonte e già Venere è ben visibile assieme alla Luna, in realtà stiamo osservando questi astri come erano in un tempo anteriore: il Sole di otto minuti prima, Venere di qualche minuto e la Luna di qualche secondo.

Il legame fra Spazio e Tempo condiziona dunque la nostra percezione dell'Universo. In particolare quando consideriamo situazioni in cui corpi materiali si muovono a velocità prossime alla velocità della luce nel vuoto la misura dello Spazio e lo scorrere del Tempo vengono a dipendere da quella velocità. Di questi effetti abbiamo prove inconfutabili in laboratorio quando misuriamo la vita media di particelle elementari che si muovono a velocità relativistiche, oppure quando utilizziamo la radiazione emessa dagli elettroni di un Sincrotrone, al loro passaggio sopra una successione di magnetini di polarità alternata (ondulatore).

## **Conclusione**

Se in ambito matematico abbiamo potuto costatare le sorprendenti ed inaspettate proprietà dell'Infinito, in quello fisico ci siamo confrontati con entità costituite da numeri enormi (verrebbe da dire: quasi infiniti!) di particelle, tanto da dover rinunciare ad uno studio dettagliato del moto di ciascuna di esse, accontentandoci di valutare grandezze fisiche legate al loro comportamento medio, quali la temperatura, la densità e la pressione. In Cosmologia ci siamo imbattuti nell'immensità dell'Universo e nella difficoltà di misurare le distanze degli astri più lontani, dovendo ricorrere a metodi indiretti, che inevitabilmente portano con sé l'incertezza legata alla solidità dell'ipotesi fisica su cui si basano. In Cosmologia stiamo assistendo ad uno sviluppo notevolissimo dell'Astrofisica

Sperimentale, che si avvale di strumenti osservativi sempre più diversificati e potenti. Le osservazioni astrofisiche si confrontano con modelli teorici in continua evoluzione, alla ricerca di una Teoria del Tutto (Big-bang, Modello Standard, unificazione delle forze fondamentali: elettromagnetica, elettro-debole, nucleare, gravitazionale), che possa legarle in particolare ai risultati degli esperimenti di Fisica delle Particelle Elementari (CERN).

Possiamo dire che attualmente non vi sono certezze sulle dimensioni, la struttura, la vita passata, quella futura dell'Universo, ma molti affascinanti modelli teorici che cercano conferme nelle sempre nuove e sorprendenti osservazioni sperimentali.

Però una certezza si sta facendo strada, anche fra i più convinti sostenitori di una Teoria del Tutto: l'assoluta irrilevanza della nostra Terra in un Universo così vasto. Questa consapevolezza dovrebbe spingerci a preservare il nostro fragilissimo Pianeta, dove miracolosamente ha potuto svilupparsi la Vita, sulle cui origini, come su quelle dell'Universo forse non potremo mai dire una parola definitiva.

Forse nessuno, meglio di Giacomo Leopardi, ha saputo sintetizzare lo smarrimento di fronte all'immensità dell'Universo, che il nostro intelletto non può comprendere e pur tuttavia affascina, spingendolo a fantasticare su di esso. Questa inadeguatezza della mente è molto probabilmente all'origine delle Religioni, che prima ancora di diventare "instrumentum regni", assolvevano (assolvono) al compito di dare una risposta irrazionale (extra-razionale) alle domande che l'Uomo s'è posto fin dalle sue origini.

## L'infinito

*Giacomo Leopardi*

*Sempre caro mi fu quest'ermo colle,  
E questa siepe, che da tanta parte  
Dell'ultimo orizzonte il guardo esclude.  
Ma sedendo e mirando, interminati  
Spazi di là da quella, e sovrumani  
Silenzi, e profondissima quiete  
Io nel pensier mi fingo; ove per poco  
Il cor non si spaura. E come il vento  
Odo stormir tra queste piante, io quello  
Infinito silenzio a questa voce  
Vo comparando: e mi sovvien l'eterno,  
E le morte stagioni, e la presente  
E viva, e il suon di lei. Così tra questa  
Immensità s'annega il pensier mio:  
E il naufragar m'è dolce in questo mare.*